



TITLE:

正定値作用素の平均に関連した不等式(Positivityに関連する解析学)

AUTHOR(S):

久保, 文夫; 安藤, 毅

CITATION:

久保, 文夫 ...[et al]. 正定値作用素の平均に関連した不等式(Positivityに関連する解析学). 数理解析研究所講究録 1985, 544: 22-38

ISSUE DATE:

1985-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98802>

RIGHT:

正定値作用素の平均に関連した不等式

富山大 理 久保文夫 (Fumio Kubo)

北大応電研 安藤 毅 (Tsuyoshi Amdo)

§1. 非負定値作用素の算術平均と調和平均. ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の非負定値な有界線型作用素を以下簡単に非負定値作用素と呼びます. 非負定値作用素の算術平均と調和平均とを次式で定義します:

$$a(A, B) = (A+B)/2, \quad h(A, B) = 2(A:B).$$

但し $A:B$ は並列和と呼ばれる演算で次式で定義されます:

$$A:B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [(A+\varepsilon I)^{-1} + (B+\varepsilon I)^{-1}]^{-1}.$$

本講演では, この2つの平均を組合わせて作られるある型の平均の間の不等式について述べます. 先ず算術平均と調和平均についての基本的で良く知られた性質を復習しておきます:

$$m = a \quad \text{又は} \quad h \quad \text{とすると}$$

$$(\text{対称性}) \quad m(A, B) = m(B, A),$$

$$(\text{凹性}) \quad m(A+B, C+D) \geq m(A, C) + m(B, D),$$

$$(\text{同次性}) \quad C^* m(A, B) C \leq m(C^* A C, C^* B C)$$

及び

$$\alpha \cdot m(A, B) = m(\alpha A, \alpha B) \quad (\forall \alpha > 0),$$

$$(\text{半連続性}) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} m(A + \varepsilon I, B + \varepsilon I) = m(A, B),$$

$$(\text{正規性}) \quad m(A, A) = A,$$

$$(\text{双対性}) \quad h(A, B) = \alpha(A^{-1}, B^{-1})^{-1} \quad (A, B: \text{可逆}).$$

次に算術平均はそれ自身線型演算のみで単純なものであるが、調和平均に対しては一種の準線型化と云うべき極値問題の解としての表現があります:

$$\langle h(A, B) z | z \rangle = 2 \inf \{ \langle Ax | x \rangle + \langle By | y \rangle : z = x + y \}$$

及び

$$h(A, B) = \max \left\{ X \geq 0 \mid \begin{bmatrix} 2A - X & X \\ X & 2B - X \end{bmatrix} \geq 0 \text{ on } \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \right\}.$$

また、これらの平均は次のように一種の functional calculus と云うべき表現も持っています: $h(t) = 2t/(t+1)$ ($t \geq 0$) とすると,

$$h(A, B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} B_\varepsilon^{1/2} h(B_\varepsilon^{-1/2} A B_\varepsilon^{-1/2}) B_\varepsilon^{1/2} \quad (\text{但し } B_\varepsilon = B + \varepsilon I).$$

§2. 平均の不等式. 非負定値作用素の算術及び調和の平均に対しても、正数の平均と同様の不等式が成立します.

定理. $A, B \geq 0 \Rightarrow \alpha(A, B) \geq h(A, B)$ かつ特に

$$\alpha(A, B) = h(A, B) \Leftrightarrow A = B.$$

この算術-調和間の不等式の部分の証明には数の場合と同様いくつかのアプローチができます。さっほど挙げてみましょう。

(4の1). 調和平均の凹性不等式で $C = B$, $D = A$ と置くと $h(A+B, B+A) \geq h(A, B) + h(B, A)$ を得て正規性, 対称性を用いれば $A+B \geq 2h(A, B)$ を得る. ///

(4の2). 調和平均の極値表現で $x = y = z/2$ が $x+y=z$ を満たしていることより,

$$\langle h(A, B) z | z \rangle \leq 2 \{ \langle A \frac{z}{2} | \frac{z}{2} \rangle + \langle B \frac{z}{2} | \frac{z}{2} \rangle \} = \langle a(A, B) z | z \rangle$$

を得る. ///

(4の3). 逆を持つ非負定値作用素 A, B に対して $A \geq B \iff \forall x, y \in \mathcal{H}; \langle Ax | x \rangle + \langle B^{-1}y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle|$ である. 半連続性より A, B の可逆性を仮定しても十分であるから, $a \geq h$ を示すには $\langle a(A, B)x | x \rangle + \langle a(A^{-1}, B^{-1})y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle|$ ($x, y \in \mathcal{H}$) を示せば良い事がわかる. (双対性 $h(A, B)^{-1} = a(A^{-1}, B^{-1})$ を用いた.) 然るにこれは自明な不等式 $A \geq A, B \geq B$ の同値条件

$$\begin{aligned} \wedge x \quad & \langle Ax | x \rangle + \langle A^{-1}y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle| \\ & \langle Bx | x \rangle + \langle B^{-1}y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle| \end{aligned} \quad (x, y \in \mathcal{H})$$

の重ね合わせである. ///

等号条件も凹性を用いて A, B が可逆であるとして, functional calculus 的に証明できます.

§3. 対称関数平均. スカラーの平均の理論はいろいろな方向へ拡張されます. 中でも変数の数を シメトリ を要求して 2以上を増すことは自然です. スカラー・変数 の 算術・調和平均の間の不等式の証明にも, その対称性に注目したアプローチがあり, 対称式の比を取ってできる平均の概念が与えられています. これを対称関数平均と呼びます. 3変数の場合は次の3つです:

$$(d+\beta+r)/3 \geq \frac{d\beta+\beta r+r d}{d+\beta+r} \geq \frac{3d\beta r}{d\beta+\beta r+r d} \quad (= 3(d^{-1}+\beta^{-1}+r^{-1})^{-1}).$$

さて非負定値作用素に対する対称関数平均の定義は,

$$\frac{d\beta+\beta r}{d+\beta+r} = (d^{-1}+(\beta+r)^{-1})^{-1} = d:(\beta+r) \text{ から暗示されます. 以下}$$

下, n 個の非負定値作用素の組 $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ に対し A_i を除いた組を $\vec{A}(i)$ と書くことにします. n 変数の算術平均

$$T_{1,n}(\vec{A}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} A_i \quad (n=1, 2, \dots)$$

から帰納的に

$$T_{k,n}(\vec{A}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{n-k+1} A_i : \frac{1}{k-1} T_{k-1,n-1}(\vec{A}(i)) \right\} \quad (2 \leq k \leq n, n=2, 3, \dots)$$

によって定義される平均を T -平均と呼びます. また

$$\frac{d\beta+\beta r+r d}{\beta+r} = d+\beta:r \text{ から暗示される平均は } P\text{-平均と呼ばれ,}$$

調和平均

$$P_{m,n}(\vec{A}) = \pi_{i=1}^m (mA_i) = (mA_1):(mA_2):\dots:(mA_n) \quad (m=1, 2, \dots)$$

から帰納的に

$$P_{k,m}(\vec{A}) = \pi_{i=1}^m: \{k A_i + (m-k) P_{k,m-1}(\vec{A}(i))\}$$

$$(1 \leq k \leq m-1, m=2, 3, \dots)$$

と定義されます。この2つの平均 $T_{k,m}(\vec{A})$ と $P_{k,m}(\vec{A})$ とは \vec{A} が正数の組であるならば $(k\text{-次対称式}) / (k-1\text{-次対称式})$ を正規化した対称関数平均に帰着します。 $m = T_{k,m}$ 又は $P_{k,m}$ に対しても2変数の作用素平均の場合と同様の基本的性質が成立します。

(対称性) $\forall n\text{-次置換 } \sigma \text{ に対し } m(\vec{A}) = m(\vec{A}_\sigma) \quad \text{但し } \vec{A}_\sigma = (A_{\sigma(i)})_{i=1}^m$

(凹性) $m(\vec{A} + \vec{B}) \geq m(\vec{A}) + m(\vec{B}) \quad \text{但し } \vec{A} + \vec{B} = (A_i + B_i)_{i=1}^m$

(同次性) $C^* m(\vec{A}) C \leq m(C^* \vec{A} C) \quad \text{但し } C^* \vec{A} C = (C^* A_i C)_{i=1}^m$

(半連続性) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} m(\vec{A}_\varepsilon) = m(\vec{A}) \quad \text{但し } \vec{A}_\varepsilon = (A_i + \varepsilon I)_{i=1}^m$

(正規性) $m(\vec{A}, A, \dots, A) = A$

(双対性) $P_{k,m}(\vec{A}) = T_{m-k+1,m}(\vec{A}^{-1})^{-1} \quad \text{但し 各 } A_i \text{ は可逆}$
 $\text{とし, } \vec{A}^{-1} = (A_i^{-1})_{i=1}^m.$

また帰納的な定義の仕方から、簡単に次の不等式が示されます。

$$\begin{array}{ccccc} T_{1,m} & \geq & T_{k,m} & \geq & T_{m,m} \\ \parallel & & & & \parallel \\ P_{1,m} & \geq & P_{k,m} & \geq & P_{m,m} \end{array} \quad (1 \leq k \leq m, m=1, 2, \dots)$$

(arithmetic)

(harmonic)

先に述べたように スカラーの場合には $T_{k,m} = P_{k,m}$ ですが、作用素の場合には一般にこの2つは等しくありません。数値例を挙げます。

$$\vec{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow T_{23}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, P_{23}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{20}{31} & \frac{3}{31} \\ \frac{3}{31} & \frac{4}{31} \end{bmatrix}$$

ここで $T_{23} - P_{23} = \frac{1}{434} \begin{bmatrix} 30 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \geq 0$ に注意します。この事実が一般的に成立つと予想されます:

Conjecture

$$T_{k,m} \geq P_{k,m} \quad (2 \leq k \leq m-1, m=3, 4, \dots)$$

単純に帰納的定義に戻って 1 ステップ戻すと係数が合わなくなり証明できません。またスカラーの場合等しいという事実から, functional calculus 型の証明は無理がありそうです。凹性を用いる証明は次の例から不可能です: (i) もし

$$\begin{aligned} (*) \quad & P_{k,m}(T_{k,m}(A_{11}, \dots, A_{1m}), T_{k,m}(A_{21}, \dots, A_{2m}), \dots, T_{k,m}(A_{m1}, \dots, A_{mm})) \\ & \geq T_{k,m}(P_{k,m}(A_{11}, \dots, A_{1m}), P_{k,m}(A_{12}, \dots, A_{12}), \dots, P_{k,m}(A_{1m}, \dots, A_{mm})) \end{aligned}$$

が成立つとすると $A_{ij} = A_{i+j-1}$ (添字は mod $m+1$) とおけば $a \geq h$ の “ λ の 1” と同様にして $T_{k,m} \geq P_{k,m}$ を得るはずで。

(ii) 然るにこの “凹性” 不等式は成立しません。なぜならもし (*) が成立てば, “ A_{ij} が全て正のスカラーなら $T_{k,m} = P_{k,m}$ ” より (*) の等号が常に成立つことになりすが, これは $A_{ij} = 3(i-1) + j$ すら成立たない等式です。従って極値表現を用いた証明が残りません。双対性から次の Subconjecture に帰着されます:

Subconjecture 1. $\vec{A} = (A_1, \dots, A_m)$ が全て可逆の時.

$$\langle T_{k,m}(\vec{A})x | x \rangle + \langle T_{m-k+1,m}(\vec{A}^{-1})y | y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle| \quad (x, y \in \mathbb{C}^m)$$

§4 Reduction. $T_{k,m}$ の帰納的定義と並列和の極値表現を用

いると Subconjecture 1 の左辺は

$$\begin{aligned}
 & \langle T_{k,m}(\vec{A}) x | x \rangle + \langle T_{m-k+1,m}(\vec{A}^{-1}) y | y \rangle \\
 = & \sum_{i=1}^m \inf_{x_i \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{m-k+1} \langle A_i(x+x_i) | x+x_i \rangle + \frac{1}{k-1} \langle T_{k-1,m-1}(\vec{A}(i)) x_i | x_i \rangle \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^m \inf_{y_j \in \mathcal{H}} \left\{ \frac{1}{k} \langle A_j^{-1}(y+y_j) | y+y_j \rangle + \frac{1}{m-k} \langle T_{m-k,m-1}(\vec{A}(j)^{-1}) y_j | y_j \rangle \right\} \\
 = & \dots \\
 = & \left[\frac{1}{m-k+1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^m \left\{ (k-1)! \langle A_i(x+x_i) | x+x_i \rangle \right. \right. \\
 & \quad + \sum_{\ell=2}^{k-1} (k-\ell)! \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{\ell-1} : \text{互に相異} \neq j}} \langle A_i(x_{i_1} \dots x_{i_{\ell-1}} + x_{i_1} \dots x_{i_{\ell-1}}) \\
 & \quad \quad \quad | x_{i_1} \dots x_{i_{\ell-1}} + x_{i_1} \dots x_{i_{\ell-1}} \rangle \\
 & \quad \quad \quad + \sum_{i \neq i_1, \dots, i_{k-1}} \langle A_i x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} | x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} \rangle \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{m-k+1} \frac{1}{(m-k)!} \sum_{j=1}^m \left\{ (m-k)! \langle A_j^{-1}(y+y_j) | y+y_j \rangle \right. \\
 & \quad + \sum_{\ell=2}^{m-k} (m-k+1-\ell)! \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{\ell-1} : \text{互に相異} \neq j}} \langle A_j^{-1}(y_{j_1} \dots y_{j_{\ell-1}} + y_{j_1} \dots y_{j_{\ell-1}}) \\
 & \quad \quad \quad | y_{j_1} \dots y_{j_{\ell-1}} + y_{j_1} \dots y_{j_{\ell-1}} \rangle \\
 & \quad \quad \quad + \sum_{j \neq j_1, \dots, j_{m-k}} \langle A_j^{-1} y_{j_1} \dots y_{j_{m-k}} | y_{j_1} \dots y_{j_{m-k}} \rangle \left. \right\} \Big]
 \end{aligned}$$

の添え字付きベクトル全てに対する infimum, と書き下します. この展開の最初の段階で現れる ダミーベクトル (以下添え字付きベクトル x は x の和の形のものとこう呼ぶ.) を level 1, 次の帰納段階で現れるものを level 2

などのように呼びます: (A_1 に属するダミー に対して)

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + x_1 & \text{--- level 1} \\ x_2 + x_{21}, x_3 + x_{31}, \dots, x_4 + x_{41}, & \text{--- level 2} \\ x_{23} + x_{231}, x_{24} + x_{241}, \dots & \text{--- level 3} \\ \vdots & \end{array} \right.$$

このようにして現れる ダミー の レベル 数は $\Gamma_{k,m}$ に対しては k で
ダミーベクトルの 総数は A_1 についてのものだけで

$$\text{comb}(k, m) := 1 + (m-1) + (m-1)(m-2) + \dots + (m-1)(m-2) \dots k$$

となります. ここでは ダミーベクトルの 並べ方に 一定の順序 (標準
順序) を決めておきます. Γ_{34} の ダミー の 例のみで + 分と 思われ

$$\begin{array}{ll} x + x_1 & \text{--- level 1.} \\ x_2 + x_{21} & \text{---} \\ \begin{array}{l} x_{23} \\ x_{24} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \text{level 3} \\ \text{level 3} \end{array} \right\} \text{level 2} \\ x_3 + x_{31} & \text{---} \\ \begin{array}{l} x_{34} \\ x_{32} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \text{level 3} \\ \text{level 3} \end{array} \right\} \\ x_4 + x_{41} & \text{---} \\ \begin{array}{l} x_{42} \\ x_{43} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \text{level 3} \end{array} \right\} \end{array}$$

A_2, \dots, A_m についての ダミーベクトルの 標準順序 は これを cyclic に 回して
作ったものとして します.

Subconjecture 1 は 大雑把に 言って

$$\inf_{z_i, w_j \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \langle A z_i | z_i \rangle + \sum_{j=1}^m \langle A^* w_j | w_j \rangle$$

の 和 の 形 を して います. この 値 が \vec{A} に independent な $2|\langle x | y \rangle|$

で 下 が 押え られる 為 には \vec{A} を 動か して

$$\max_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in A^{-1}}} \left\{ \sum_{i=1}^m \langle A z_i | z_i \rangle + \sum_{j=1}^m \langle A^* z_j | z_j \rangle \right\}$$

を求めることに帰着しますが、これは Flanders により既に解かれており、
値は行列 $G = [\langle z_i | z_j \rangle]_{i,j=1}^m$ の trace-norm $\|G\|_1 = \text{tr}((G^*G)^{\frac{1}{2}})$
です。このような行列を Gram 行列と呼びます。

M_1 と A_1 について現れる ダミーベクトル x, \dots と A_1^{-1} について
現れる ダミーベクトル y, \dots から作られる Gram 行列とします。
添え字をサイクルに回ると A_2, A_2^{-1} についての Gram 行列 M_2, \dots
 A_m, A_m^{-1} についての Gram 行列 M_m が得られます。各ダミーベクトル
には $\sqrt{n-k+1} \sqrt{(k-1)!}$, $\sqrt{k} \sqrt{(n-k)!}$ を掛けておきますと Subconjecture 1
は次の問題に帰着します。三角不等式が少し強くしておきます。

Subconjecture 2

$$\left\| \sum_{i=1}^m M_i \right\|_1 \geq 2k(n-k+1) |\langle x | y \rangle|$$

$M = \sum_{i=1}^m M_i$ の trace-norm を求めるには, duality

$$\|M\|_1 = \sup_{\|S\|_\infty \leq 1} |\text{tr}(S^* M)|$$

を用い、次のような行列 (スキャタリング行列) S の存在を確認する
ことになります。

Subconjecture 3.

$$\exists S ; \quad \text{tr}(S^* M) = 2k(n-k+1) \|S\|_\infty |\langle x | y \rangle|$$

(S は $\text{comb}(k, m) \times \text{comb}(n-k+1, m)$ 行列です.)

§5. スキャタリング行列の構成. ダミーベクトルはそれぞれ対称に含まれているので, スキャタリング行列は ダミーベクトルを一つも含まないように構成できます.

i) M の要素の中で $\langle x | y \rangle$ を含んでいる要素は $(1, 1)$ のもののみなので S_{11} は不定ですが, 要素を 整数 $\times \sqrt{\text{整数}}$ の形に保っておくため,

$$S_{11} = \sqrt{(n-1)!/(n-k)!} \cdot \sqrt{(n-1)!/(k-1)!}$$

と定めます.

ii) level 1 で現れる y のダミーベクトル y_i は symmetric に現れており, M では $\langle x | \Sigma y_i \rangle$ の形をしています 従って ダミーベクトルを消去するには

$$S_{11} \langle x | \Sigma y_i \rangle + S_{21} \langle x | \Sigma y_i \rangle + S_{2+\text{comb}(k, n-1), 1} \langle x | \Sigma y_i \rangle + \dots \\ \dots + S_{\text{comb}(k, n), 1} \langle x | \Sigma y_i \rangle = 0$$

を既知の S_{11} を除いて symmetric に解きます:

$$S_{21} = S_{2+\text{comb}(k, n-1), 1} = \dots = S_{\text{comb}(k, n), 1} = -\sqrt{(n-2)!/(n-k)!} \cdot \sqrt{(n-2)!/(k-1)!}$$

以下同様に level の低いダミーから順に また x のダミーについて level の低いものから順に symmetric に解きます. 解は S_{11} が決めれば unique に決まり, symmetry の結果 S は 次のような形をしています:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \vec{a} & \vec{a} & \dots & \vec{a} \\ \vec{b} & c_0 & c_{n-2} & \dots & c_1 \\ \vec{b} & c_1 & c_0 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{b} & c_{n-2} & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix} \in M_{\text{comb}(k, n), \text{comb}(n-k+1, n)}.$$

また各ブロックは次のようなサイズの行列です.

$$C_i \in M_{\text{comb}(k, n-1), \text{comb}(n-k, n-1)} \quad (i=0, 1, \dots, n-2)$$

$$\vec{a} \in M_{1, \text{comb}(n-k, n-1)}$$

$$\vec{b} \in M_{\text{comb}(k, n-1), 1}.$$

この時 C_0 は $T_{k-1, n-1} \geq P_{k, n-1}$ という弱不等式を証明する時現われるスカッタリング行列のスカラ倍です.

このようにして得られた対称関数平均の不等式は次の通りです.

$$\text{定理} \quad T_{2m} \geq P_{2m} \quad (m \geq 3)$$

$$T_{m-1, m} \geq P_{m-1, m} \quad (")$$

(後半は duality による.)

$$\text{定理} \quad T_{2m} \geq P_{m-1, m} \quad (m \geq 3)$$

$$T_{2m} \geq P_{m-2, m} \quad (m \geq 4)$$

$$T_{3m} \geq P_{m-1, m} \quad (")$$

$$T_{2m} \geq P_{m-3, m} \quad (m \geq 5)$$

$$T_{3m} \geq P_{m-2, m} \quad (")$$

$$T_{4m} \geq P_{m-1, m} \quad (")$$

$$T_{2m} \geq P_{m-4, m} \quad (m \geq 6)$$

$$T_{3m} \geq P_{m-3, m} \quad (")$$

$$T_{4m} \geq P_{m-2, m} \quad (")$$

$$T_{5m} \geq P_{m-1, m} \quad (")$$

§6 スキャタリング行列を求めるプログラム例. ここでは

$\pi_{23} \geq p_{23}$ を求めるプログラムを掲載する. n が小さい時にはこの様にプログラムを分割することは時間のロスになるが, この方法は n が大きくて スキャタリング行列 π のものすら CPU に記憶させられない時でも, ディスクメモリを用いることで実行できる.

最初のプログラム (A0CT01&3.BAS) は ダミーベクトル, π の係数, 及び スキャタリング行列の要素を設定する initializing program である. GB は S_{ij} を求める為のスイッチの役を果たす.

第2以下が $\langle x_i | y \rangle$, $\langle x_i | \sum_{j=1}^m y_j \rangle$, ... の係数に対応する S_{ij} を求めるプログラムである. 文番号 250-300 を次々に入れ替えることで $\langle \sum_{i=1}^m x_i | y \rangle$ に対応する S_{ij} が得られる. (A0CT3&3 - A0CT4&3) 最後は $\sum \langle x_i | y_i \rangle$, $\sum \langle x_{i+1} | y_i \rangle$... を求めるために少し 225 番が入り, 990 番が変更される. これらのダミーベクトルの内積の和は $(0|0)$, $(1|0)$, ... のように表示されている.

この一連のプログラムはあまり易く・組み易くする為にダミーベクトルの表示と無駄使いしてあるが, 実際にはもっと少いディスクスペースで十分である. (この場合は 256 使用, $\pi_{27} \geq p_{27}$ なら 398,336 使用だが, $\pi_{27} \geq p_{27}$ は短縮すれば 190,592 で済む). 使用機材は東芝の PA 7020, TBASIC/MS-DOS である.

プログラム例.

AOCT01&3.BAS

```

100 'This is the 1st program of "AOCT01&3.BAS" for T(2,3)*****
200 CLS:CLER:PRINT "start=";TIME$
210 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
220 K=2: D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2
300 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=18
310 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
400 'x1*****
410 Z=0:GOSUB 1010:X(1)=-1:X(2)=1:C1=1:Z=Z+1
420 W=0:GOSUB 600
440 GOSUB 500
490 CLOSE:PRINT TIME$:END
500 'x2,x3*****
510 FOR J1=2 TO N:K1=J1
520 GOSUB 1010:X(2)=K1:C1=1:Z=Z+1
525 W=0:GOSUB 600
590 NEXT J1:RETURN
600 'y1*****
610 GOSUB 1020:Y(1)=-1:Y(2)=1:C2=1:W=1:C=C1*C2:G=0:S=0
620 GOSUB 2000:NUM%=D2*(Z-1)+W:PUT #1,NUM%
630 PRINT C,X(1);X(2),Y(1);Y(2),G,S
640 GOSUB 700
650 RETURN
700 'y2,y3*****
710 FOR JJ1=2 TO N:KK1=JJ1
720 GOSUB 1020:Y(2)=KK1:C2=1:W=1:C=C1*C2:G=0:S=0
730 GOSUB 2000:NUM%=D2*(Z-1)+W:PUT #1,NUM%
740 PRINT C,X(1);X(2),Y(1);Y(2),G,S
760 NEXT JJ1:RETURN
1000 'Initializing Subroutine*****
1010 FOR I=1 TO X:X(I)=0:NEXT I:RETURN
1020 FOR I=1 TO Y:Y(I)=0:NEXT I:RETURN
1990 'Denumeration (LSET)*****
2000 LSET C$=MKS$(C):LSET X1$=MKI$(X(1)):LSET X2$=MKI$(X(2))
3000 LSET Y1$=MKI$(Y(1)):LSET Y2$=MKI$(Y(2))
4000 LSET G$=MKI$(G):LSET S$=MKS$(S):RETURN

```

AOCT02&3.BAS

```

100 'This is the 2nd program of "AOCT02&3.BAS" for T(2,3)*****
110 CLS:CLER:PRINT "start=";TIME$
120 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
130 K=2: D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2
140 PRINT "C",X1-X2,"Y1-Y2","G","S"
150 PRINT "
210 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=18
220 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
230 FOR Z=1 TO D1:FOR W=1 TO D2:NUM%=D2*(Z-1)+W
240 GET #1,NUM%:GOSUB 1010
250 '***** <x1y>
260 IF X1=-1 AND Y1=-1 THEN S=N-1:G=1
270 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
280 '*****
980 PRINT C,X1,X2,Y1,Y2,G,S
990 NEXT W:NEXT Z:CLOSE:END
1000 'Enumeration (CVI/CVS)*****
1010 C=CVS(C$)
1020 X1=CVI(X1$)
1030 X2=CVI(X2$)
1040 Y1=CVI(Y1$)
1050 Y2=CVI(Y2$)
1060 G=CVI(G$)
1070 S=CVS(S$):RETURN
2000 'Denumeration (LSET)*****
2010 LSET C$=MKS$(C)
2020 LSET X1$=MKI$(X1)
2030 LSET X2$=MKI$(X2)
2040 LSET Y1$=MKI$(Y1)
2050 LSET Y2$=MKI$(Y2)
2060 LSET G$=MKI$(G)
2070 LSET S$=MKS$(S):RETURN

```

AOCT03&3.BAS

```

-250 '***** <x10>
260 IF X1<-1 OR Y2=0 THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
-280 IF G=-1 THEN SUM=SUM+S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
-300 '*****

```

AOCT04&3.BAS

```

250 *****
260 IF X2=0 OR Y1<-1 THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
280 IF G=1 THEN SUM=SUM-S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
300 *****

```

AOCT05&3.BAS

```

210 OPEN "GRA23&23.DT3" AS #1 LEN=10
220 FIELD #1,4 AS C$,2 AS X1$,2 AS X2$,2 AS Y1$,2 AS Y2$,2 AS G$,4 AS S$
225 FOR A=0 TO N-1
226 PRINT "(",A,"; ",0 ) = ",TIME$
230 SUM=0:T=0:FOR Z=1 TO D1:FOR W=1 TO D2:NUM%=D2*(Z-1)+W
240 GET #1,NUM%:GOSUB 1010
245 ML=X2-Y2:GOSUB 3010:UU=ML
250 *****
260 IF X2=0 OR Y2=0 THEN GOTO 980
265 IF UU<>A THEN GOTO 980
270 IF G=0 THEN G=-1:T=T+1
280 IF G=1 THEN SUM=SUM-S*SQR(C)
290 GOSUB 2010:PUT #1,NUM%
300 *****
990 NEXT W:NEXT Z:GOSUB 7000:NEXT A:CLOSE:END

```

結果の印刷用プログラムと結果

SCAT23PR.BAS

```

100 'This is the program for printing the scattering matrix of T(2,3)*****
110 CLEAR
120 R=2:N=3:D1=1+(N-1):X=1+1:DIM X(X)
130 K=2:D2=1+(N-1):Y=1+1:DIM Y(Y):D=D1*D2:DIM S(D1,D2)
500 'SCAT2323.DT3*****scattering matrix data*****
510 OPEN "SCAT2323.DT3" FOR INPUT AS #1
520 FOR I=1 TO D1:FOR J=1 TO D2:INPUT #1,S(I,J):NEXT J:NEXT I
530 CLOSE
540 FOR I=1 TO D1:FOR J=1 TO D2:LPRINT S(I,J),:NEXT J:LPRINT :NEXT I
550 END

```

2	-1	-1
-1	-1	2
-1	2	-1

67

16

(cont., -2)

1	12	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	$6\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	4	-2	4	4	4
3	$-3\sqrt{2}$	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10		
4	$-3\sqrt{2}$	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3		
5	$-3\sqrt{2}$	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2		
6	$3\sqrt{2}$	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1		
7	$6\sqrt{2}$	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4		
8	$-3\sqrt{2}$	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0	6	-10	1	3		
9	$-3\sqrt{2}$	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1	-4	2	0	2		
10	$3\sqrt{2}$	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0	-2	1	0	1		
11	$-3\sqrt{2}$	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1	6	3	1	-10		
12	$6\sqrt{2}$	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2	-6	4	4	-2		
13	$-3\sqrt{2}$	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2	-4	2	2	0		
14	$3\sqrt{2}$	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0	-2	1	1	0		
15	$-3\sqrt{2}$	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2	6	3	-10	1		
16	$-3\sqrt{2}$	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2	6	-10	3	1		
17	$6\sqrt{2}$	-6	4	4	-2	-6	4	-2	4	-6	-2	4	4	6	-2	-2	-2		
18	$3\sqrt{2}$	-2	1	1	0	-2	1	0	1	-2	0	1	1	0	0	0	0		
19	$-3\sqrt{2}$	-4	2	2	0	6	-10	1	3	6	1	3	-10	-2	-2	2	2		
20	$-3\sqrt{2}$	6	3	-10	1	-4	2	0	2	6	1	-10	3	-2	2	-2	2		
21	$-3\sqrt{2}$	6	-10	3	1	6	3	1	-10	-4	0	2	2	-2	2	2	-2		
22	$-10\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2	6	-2	-2	-2		
23	$3\sqrt{2}$	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3		
24	$-3\sqrt{2}$	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3		
25	$3\sqrt{2}$	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2	-4	3	3	-2		
26	$3\sqrt{2}$	-4	3	3	-2	-4	3	-2	3	-4	-2	3	3	6	-2	-2	-2		